

Laboratorio di INFORMATICA di BASE

GLI AUTOMI
A STATI FINITI

Renato Agati

INDICE

1 Introduzione

2 Automa

- 2.1 Concetto di automa
- 2.2 Rappresentazione di un automa
- 2.3 Definizione di automa a stati finiti
- 2.4 Automi propri e impropri: modelli di Moore e di Mealy
- 2.5 Proprietà degli automi

3 La macchina di Turing

4 Curiosità

- 4.1 Il passato
- 4.2 Il presente

1 Introduzione

L'elaboratore è uno strumento utile in molti contesti, per affrontare situazioni anche piuttosto diverse tra loro.

In particolare, esso è capace di svolgere una serie di azioni in sequenza.

Dato un problema, se si vuole utilizzare un computer, occorre stabilire una strategia risolutiva prima di passare ad impartire ordini alla macchina.

Bisogna cioè comprendere i termini della questione, riflettere sui concetti di problema e risoluzione, confrontandosi con un ipotetico esecutore, indipendentemente dalle caratteristiche tecniche di una particolare macchina, dalle questioni relative al suo funzionamento e dai modi di comunicazione con essa.

In questa logica, risolvere un problema significa ricercare ed esprimere una successione di passi per trasformare le informazioni iniziali in altre finali, che soddisfino l'obiettivo e siano compatibili con i vincoli emersi da una adeguata analisi.

Si definisce un **algoritmo**, ovvero una sequenza finita di **passi elementari** per la risoluzione di un problema, passi specificati in modo non ambiguo, cioè immediatamente evidenti all'esecutore dell'algoritmo stesso.

Ogni algoritmo, quale trasformazione di dati iniziali in dati finali, è caratterizzato da due componenti fondamentali e distinte: le **istruzioni** (parole che specificano le operazioni da eseguire) e i **dati** (insieme di oggetti su cui operare).

Una macchina in grado di eseguire in modo automatico le istruzioni contenute in un algoritmo è chiamata **automa** (dal greco *autòmaton* che significa " che si muove da se").

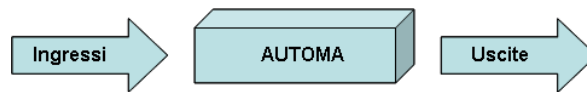
2 Automa

2.1 Concetto di automa

Per quanto detto nell'introduzione, possiamo definire automa un qualunque dispositivo in grado di eseguire una sequenza di azioni / operazioni (istruzioni), in modo automatico e senza l'intervento manuale di una persona.

In particolare, l'automata eseguirà le operazioni nell'ordine stabilito per produrre i risultati attesi.

L'automata è dotato di meccanismi che gli consentono di acquisire elementi dall'esterno e produrre elementi verso l'esterno.



In una sessione didattica, per meglio far comprendere cos'è e come funziona un automa, si possono portare vari esempi.

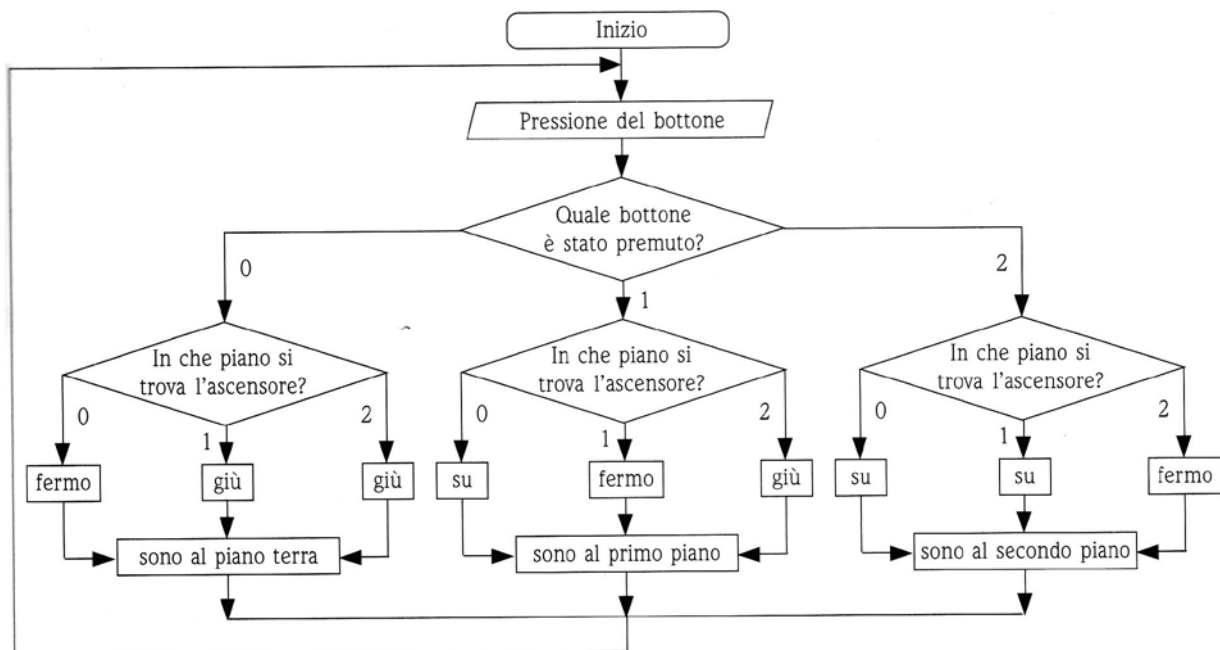
Esempio 1: l'ascensore

Consideriamo l'ascensore di un edificio di due piani. L'ascensore avrà tre pulsanti, corrispondenti al piano terra, al primo e al secondo piano (marcati rispettivamente con i numeri 0, 1 e 2).

Premendo un pulsante, l'ascensore si sposta al piano corrispondente.

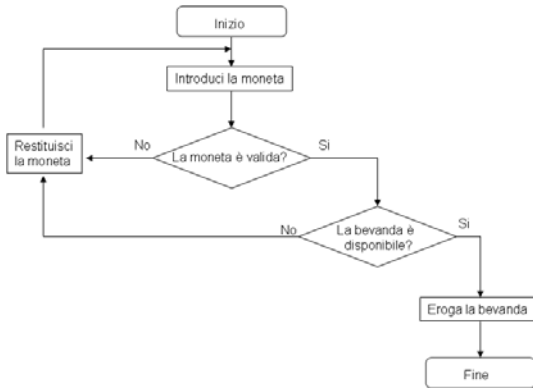
Le azioni dell'ascensore dipendono non solo dal pulsante che si preme, ma anche dal piano in cui si trova l'ascensore: se premiamo il pulsante del primo piano, l'ascensore salirà se si trova al piano terra, scenderà se si trova al secondo piano, starà fermo se si trova già al primo piano.

L'immagine che segue rappresenta l'algoritmo (espresso sotto forma di diagramma di flusso) che descrive il funzionamento dell'ascensore.



Esempio 2: la macchina per la distribuzione di bibite

Consideriamo una macchina per la distribuzione di bibite. La macchina eroga la bibita introducendo una moneta da 50 centesimi. L'algoritmo di funzionamento può essere il seguente:

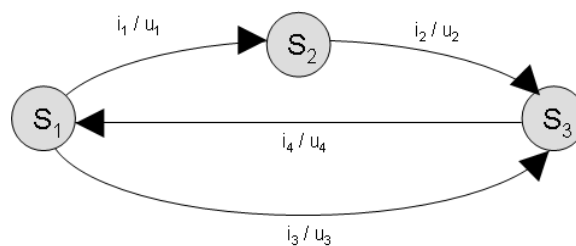


Durante il suo funzionamento, la macchina assume diversi stati: se non sono state inserite monete, si trova in uno stato di accettazione; se la moneta è stata inserita, si trova in uno stato di erogazione e non accetta altre monete; se la bevanda è esaurita, si trova in uno stato di macchina non funzionante e non accetta monete.

2.2 Rappresentazione di un automa

Oltre agli algoritmi, il funzionamento di un automa può essere descritto utilizzando grafi e tabelle.

Il **grafo** è una rappresentazione che utilizza, come simboli, cerchi e linee curve orientate. I cerchi indicano gli stati dell'automata e le linee curve indicano le transizioni da uno stato all'altro. I due simboli riportati sulle linee curve indicano il simbolo di input che determina il passaggio di stato, e il simbolo di output prodotto all'esterno.



In questo grafo viene rappresentato un automa che, trovandosi nello stato **S₁**, ricevendo in ingresso il simbolo **i₁** passa allo stato **S₂** producendo in uscita il simbolo **u₁**. Se in ingresso riceve invece il simbolo **i₃**, passa allo stato **S₃** producendo in uscita il simbolo **u₃**.

La funzione degli stati successivi e la funzione delle uscite possono essere rappresentate anche attraverso l'utilizzo di tabelle:

Nella **tabella degli stati successivi** qui a fianco, all'incrocio di una riga con una colonna viene indicato lo stato in cui si trova l'automa in corrispondenza del simbolo di input e dello stato precedente.

Stati input \	S₁	S₂	S₃	S₄
i₁	S ₁₁	S ₁₂	S ₁₃	S ₁₄
i₂	S ₂₁	S ₂₂	S ₂₃	S ₂₄
i₃	S ₃₁	S ₃₂	S ₃₃	S ₃₄

Nella **tabella delle uscite** qui a fianco, all'incrocio di una riga con una colonna viene indicato il simbolo di output comunicato all'esterno in corrispondenza del simbolo di input e dello stato precedente.

Stati input \	S₁	S₂	S₃	S₄
i₁	U ₁₁	U ₁₂	U ₁₃	U ₁₄
i₂	U ₂₁	U ₂₂	U ₂₃	U ₂₄
i₃	U ₃₁	U ₃₂	U ₃₃	U ₃₄

Le tabelle degli stati successivi e delle uscite possono essere rappresentate con un'unica tabella, detta tabella di transizione che può essere semplificata applicando il teorema di Karnough, dando visione completa delle funzioni di un automa.

2.3 Definizione di automa a stati finiti

Per quanto detto finora e dagli esempi riportati, si può affermare che un **automa** è un dispositivo creato per eseguire un particolare compito, che può trovarsi in diverse **configurazioni** più o meno complesse, che può assumere un insieme **finito di stati**, e che evolve in base agli stimoli od ordini ricevuti in ingresso schematizzati da simboli appartenenti ad un determinato alfabeto.

Dal punto di vista formale l'automa è definito come un insieme di cinque elementi:

- l'alfabeto dei simboli di input
insieme dei simboli che l'automa riceve dall'esterno e riconosce:
 $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$
- l'alfabeto dei simboli di output
insieme dei simboli che l'automa comunica all'esterno:
 $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$
- l'insieme dei possibili stati
le situazioni più importanti che l'automa può assumere durante il suo funzionamento:
 $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$
- la funzione degli stati successivi
la relazione che indica lo stato assunto dall'automa (nell'istante t successivo a quello considerato) quando, trovandosi in un determinato stato, accetta dall'esterno un determinato simbolo di input:
$$(i_t, s_{t-1}) \xrightarrow{T} s_t$$
- la funzione delle uscite
la relazione che indica il simbolo che viene emesso verso l'esterno, in corrispondenza di un determinato stato e di un determinato simbolo di input:
$$(i_t, s_{t-1}) \xrightarrow{\omega} u_t$$

L'automa è quindi definito come l'insieme (la quintupla) dei cinque elementi appena descritti:
 $A = (I, U, S, T, \omega)$

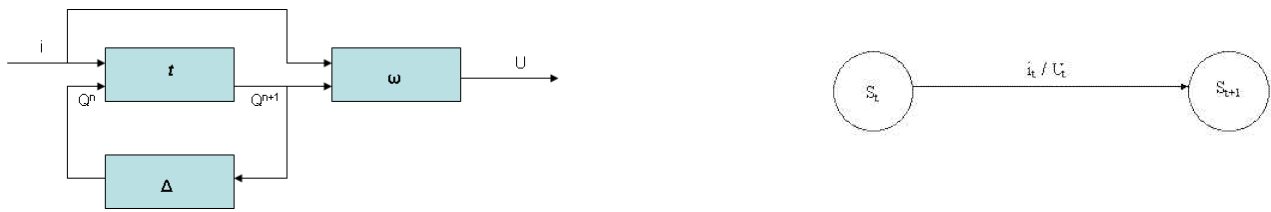
2.4 Automi propri e impropri: modelli di Moore e di Mealy

Un automa a stati finiti può essere proprio o improprio.

Se in un automa l'uscita dipende istantaneamente dall'ingresso l'automa si dice **improprio** o **automa di Mealy**.

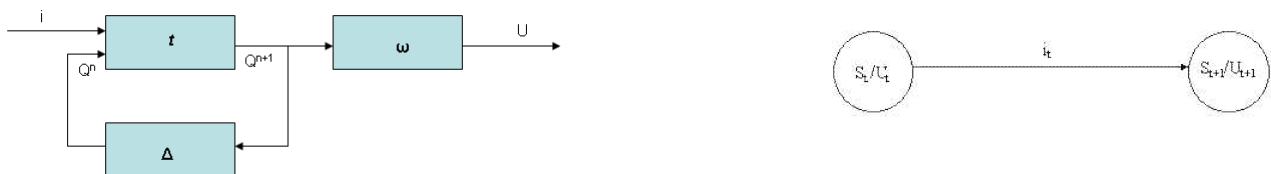
Se l'uscita invece non dipende istantaneamente dall'ingresso, l'automa si dice **proprio** o **automa proprio di Moore**.

L'automa improprio di **Mealy** può essere così rappresentato graficamente:



In questo modello di automa improprio possiamo vedere che l'uscita dipende dal tempo, dall'ingresso applicato e dallo stato del sistema in quell'istante. In altre parole al ricevimento di un segnale di ingresso viene calcolata prima l'uscita e poi lo stato futuro dell'automa stesso. La funzione di trasformazione può essere scritta sotto la forma: **$u(t) = g(t, i(t), s(t))$**

La rappresentazione grafica dell' **automa proprio di Moore** è invece la seguente:



In questo modello di automa proprio possiamo vedere che quando l'automa riceve un segnale di ingresso, effettua dapprima la transizione verso lo stato futuro e poi calcola l'uscita in funzione del nuovo stato acquisito. La funzione di trasformazione può essere scritta sotto la forma: **$u(t) = g(t, s(t))$**

2.5 Proprietà degli automi

Statico/Dinamico

Un automa si dice statico quando tutte le sue variabili si mantengono costanti nel tempo.

Un automa si dice dinamico quando tra le sue variabili ve ne è almeno una che varia nel periodo di osservazione.

Discreto/Continuo

Un automa si dice continuo quando le variabili variano in modo continuo nel tempo (ad es. in un serbatoio d'acqua che deve essere svuotato il livello d'acqua varia in modo continuo).

Un automa si dice discreto quando gli insiemi di definizione delle variabili sono discreti (ad. esempio nel sistema di illuminazione di una stanza la luce può essere accesa o spenta).

Deterministico/Probabilistico

In un automa deterministico le funzioni di stato e uscita permettono di determinare con precisione e univocamente il valore dello stato e delle uscite (ad esempio il sistema distributore di bibite).

Un automa si dice probabilistico quando almeno una delle funzioni di transizione o trasformazione è regolata da legami di natura probabilistica (funzione di probabilità distribuita tra i valori possibili).

In questo caso non è possibile prevedere il comportamento del sistema in modo inequivocabile, poiché esso ha comportamenti diversi anche se sottoposto alle medesime sollecitazioni (ad es. il lancio di un dado).

Variante/Invariante

Un automa si dice variante quando il suo comportamento cambia nel tempo: cioè se esistono almeno istanti di tempo t_1 e t_2 tali che il sistema, a partire dal medesimo stato iniziale $s(t_1) = s(t_2)$ e applicando in ingresso i medesimi valori di ingresso $i(t)$, l'evoluzione dello stato sia diversa cioè: $s(t_1 + t) \neq s(t_2 + t)$. Se la precedente uguaglianza è verificata per tutte le possibili coppie di valori t_1 e t_2 l'automata è detto invariante ed il suo comportamento non dipende dal tempo. Il fatto che un automa sia invariante non significa che non si evolva nel tempo (cioè che sia un sistema statico), ma che si evolva sempre seguendo le stesse regole di comportamento.

Reversibile/Irreversibile

Un automa si dice reversibile quando tutti gli stati sono reversibili, ovvero quando ciascun stato viene raggiunto da stati diversi con ingressi diversi.

Un automa è irreversibile quando almeno uno stato è irreversibile.

3 La macchina di Turing

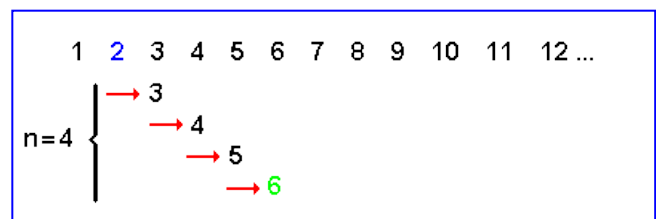
“Esiste sempre, almeno in linea di principio, un metodo meccanico (cioè una maniera rigorosa) attraverso cui, dato un qualsiasi enunciato matematico, si possa stabilire se esso sia vero o falso?”
 A questa questione posta da Hilbert nel 1928, Alan M. Turing rispose proponendo un modello di macchina astratta in grado di eseguire algoritmi costituiti da passi elementari e discreti di calcolo. Turing descrisse tale macchina nell'articolo intitolato **On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem**, pubblicato nel 1936.

L'idea di Turing è quella di pensare ad una semplice macchina che simula il processo di calcolo umano quando si è impegnati a risolvere un algoritmo di calcolo: nell'eseguire un calcolo (manuale), dato un input, calcoliamo un risultato con l'ausilio della scrittura su carta di cui, solitamente, ne abbiamo a disposizione una quantità illimitata per registrare i risultati parziali del calcolo.

Per Alan Turing, la prima questione da risolvere consisteva quindi nel precisare le azione elementari che compiamo quando eseguiamo un calcolo.

Per far questo, supponiamo di eseguire una somma di due numeri (naturali), per esempio $2 + 4$.

Visualizzando una sequenza di numeri naturali ordinati in successione, consideriamo il numero 2 e ripetiamo 4 volte l'operazione di passaggio al numero successivo: da 2 a 3, da 3 a 4, da 4 a 5, da 5 a 6. Il numero 6 è il risultato richiesto.

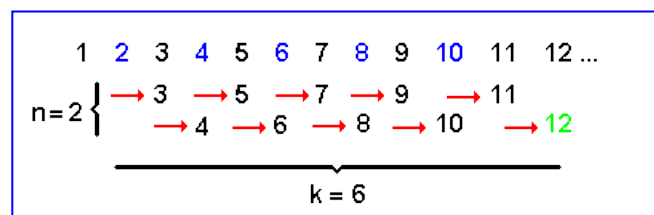


Per ottenere il risultato della somma proposta, dobbiamo quindi seguire questi passaggi:

- individuare un numero (quello di partenza);
- passare al numero immediatamente successivo;
- controllare se si è raggiunto il numero di ripetizioni previste ($n = 4$, in questo caso);
- ripetere un'operazione (quella di passaggio al numero successivo)

Questo è dunque l'algoritmo della somma di due numeri.

La sequenza di operazioni esaminata, si presta anche per eseguire moltiplicazioni. Per esempio, 2×6 equivale ad aggiungere 6 volte il numero 2 (o 2 volte il numero 6)



Per ottenere il risultato della moltiplicazione proposta, dobbiamo seguire questi passaggi:

- individuare un numero (quello di partenza);
- passare al numero immediatamente successivo;
- controllare se si è raggiunto il numero di ripetizioni previste per il primo ciclo ($n = 2$, in questo caso);
- ripetere un'operazione (quella di passaggio al numero successivo);
- controllare se si è raggiunto il numero di ripetizioni previste per il secondo ciclo ($k = 6$, in questo caso)

La macchina di Turing è formata da una testina di lettura e scrittura con cui è in grado di leggere e scrivere su un nastro di lunghezza infinita nel quale vengono immagazzinati i dati o sequenze di simboli del calcolo.

Il controllo della MdT ha accesso al nastro attraverso una *testina* di lettura e scrittura che permette di leggere o scrivere *un simbolo alla volta*. Una MdT è pertanto costituita da due parti: il programma finito secondo cui verrà eseguito il calcolo e gli organi meccanici per lo scorrimento del nastro e il comando della testina.

Ad ogni istante di tempo t_1 , la macchina si trova in uno stato interno s_1 ben determinato, risultato dell'elaborazione compiuta sui dati letti.

Lo stato interno, o configurazione, di un sistema è la condizione in cui si trovano le componenti della macchina ad un determinato istante di tempo t . Le componenti da considerare sono:

- il numero della cella osservata
- il suo contenuto
- l'istruzione da eseguire

Tra tutti i possibili stati, si distinguono:

- una configurazione iniziale, per $t=t_0$ (prima dell'esecuzione del programma)
- una configurazione finale, per $t=t_n$ (al termine dell'esecuzione del programma)
- delle configurazioni intermedie, per $t=t_i$ (prima dell'esecuzione dell'istruzione o_i)

Implementare un algoritmo in questo contesto significa effettuare una delle quattro operazioni elementari:

- spostarsi di una casella a destra
- spostarsi di una casella a sinistra
- scrivere un simbolo preso da un insieme di simboli a sua disposizione su una casella
- cancellare un simbolo già scritto sulla casella che sta osservando
- oppure fermarsi.

Eseguire un'operazione o_1 , tra gli istanti di tempo t_1 e t_2 , vuol dire passare dallo stato interno s_1 al s_2 . Più formalmente questo si esprime in simboli come: $\{s_1, a_1, o_1, s_2\}$ da leggersi come: *nello stato interno s_1 la macchina osserva il simbolo a_1 , esegue l'operazione o_1 e si ritrova nello stato interno s_2 .*

Per dare ragione dell'universalità della macchina di Turing, basta dimostrare come effettuare le 4 operazioni fondamentali (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) in quanto tutte le altre sono riducibili a queste.

Questo concetto è ripreso nella Tesi di Church-Turing (1936): *Ogni algoritmo che può essere eseguito da un umano o da un computer può essere eseguito da una macchina di Turing.*

Per dimostrare che una funzione è calcolabile (o un linguaggio è decidibile), basta scrivere un algoritmo che la calcoli: la tesi di Church-Turing ci assicura che può essere eseguito da una macchina di Turing

4 Curiosità

4.1 L'automa nella storia

Il termine greco *autòmaton* significa "che si muove da se".

I greci conoscevano, quindi, quelle macchine che riproducevano i movimenti e, talvolta, l'aspetto di corpi animati.

Durante il Medioevo Bernardino Baldi creò automi che si muovevano azionati da un sistema idraulico, Leonardo da Vinci stupì la Milano di Ludovico il Moro con figure mobili antropomorfe e animali e macchine fantastiche, ma il vero sviluppo degli automi si ebbe durante il XVI secolo, quando i maestri orologiai di Augusta e Norimberga realizzarono piccoli orologi da tavolo con scene, tratte dalla commedia italiana o dalla mitologia classica, che si muovevano meccanicamente.

Agli inizi del Settecento un noto predicatore viennese, Abraham a Santa Clara, parlava di "bambole così abilmente congegnate che diventavano animate e si muovevano da sole, spinte da prodigiosi meccanismi".

Bisogna arrivare a epoche relativamente recenti, si parla del XVIII secolo all'incirca, perché si possano trovare testimonianze concrete di queste "creature" o "automi", tralasciando almeno in parte la pura mitologia e le descrizioni tramandate dai documenti antichi. È il secolo in cui Jacques de Vaucanson passò alla storia per aver realizzato tra il 1737 e il 1741 una serie di automi che si muovevano grazie ad un sistema di pesi, canne e leve. La sua creazione più celebre raffigurava un suonatore di flauto in grado di eseguire con il suo strumento undici melodie differenti.

Dalla metà del XIX secolo, gli automi divennero sempre di più prodotti di diffusione per la ricca borghesia, abbandonando quella nicchia di mercato che li aveva visti protagonisti come oggetti unici, rari ed eccezionali. Prodotti in serie più o meno numerose e a volte numerati, secondo il costo, la complessità del soggetto e del meccanismo, erano ispirati ai soggetti più vari tratti dal repertorio della vita quotidiana.

Il periodo di maggiore sviluppo per l'industria degli automi europei fu tra il 1880 e il 1920, quando i costruttori tedeschi, francesi e svizzeri ne esportavano in tutto il mondo in grande quantità. Se i tedeschi privilegiarono l'economia e la semplicità, scenette prevalentemente a soggetto infantile, meccanismi spesso manuali e con poche variazioni, i francesi diedero grandissima importanza agli automatismi più complessi, ad abiti raffinati, legati alla storica tradizione della moda parigina.

Anche scrittori di fantascienza hanno immaginato un mondo in cui i robot, "figli" degli uomini, sostituiscono le persone in ogni genere d'occupazione e comportamento: possiamo ricordare il mitico Golem narrato da Gustav Meyerink, capostipite di questa generazione di "androidi", gli uomini meccanici rudimentali più semplici e privi d'intelligenza, pensati per adempiere al lavoro gravoso, il ciclo dei raffinati robot di bell'aspetto e dai sentimenti ineffabili raccontati da Isaac Asimov, gli umanissimi replicanti del film di Ridley Scott, "Blade Runner", e la simpatica coppia di robot della saga cinematografica di "Guerre Stellari".

Con l'avvento del computer gli automi e i robot hanno incorporato enormi possibilità di sviluppo e di sofisticazione, di concrete possibilità di realizzazione.

La cibernetica per prima ha individuato la grande importanza che ha il problema di affrontare il legame profondo esistente tra comunicazione, cioè come riceviamo e interpretiamo le informazioni dall'esterno, e controllo, ovvero come usiamo tali informazioni per comandare i nostri arti, e quindi

la gestualità. Grazie agli studi della cibernetica, e grazie al fatto che fotocellule, relè, motori elettrici stavano diventando oggetti a buon mercato, nel dopoguerra molti ricercatori si divertirono a inventare miriadi di creature cibernetiche, automi basati sulla percezione del mondo esterno e sul principio di retroazione. La cibernetica nasceva quindi con l'idea di ricostruire artificialmente i riflessi nervosi degli esseri viventi, mentre l'intelligenza artificiale avrebbe tentato di ricreare i pensieri astratti, il ragionare; questi due approcci si integrano sinergicamente nel tentativo di creare robot antropomorfi intelligenti.

4.2 I microcontrollori

Alla base di un automa c'è l'esecuzione di un algoritmo da parte di un microprocessore. Un microprocessore è un componente in grado di svolgere una specifica sequenza di operazioni secondo un certo programma. Osservando lo schema di una scheda a microprocessore, ci si rende facilmente conto che, per poter lavorare, un microprocessore necessita di una serie di componenti esterni senza i quali risulta inutilizzabile: memorie, circuiti di interfaccia, bus e così via. E' evidente che sarebbe più comodo avere a disposizione un unico componente che, oltre ad avere integrate tutte le funzioni tipiche di un microprocessore, unisse sullo stesso chip anche tutta la circuiteria montata all'esterno. Questo componente esiste già da alcuni anni e prende il nome di microcontrollore.

Il microcontrollore è un dispositivo che integra al suo interno diversi componenti per realizzare un unico dispositivo versatile in grado di realizzare funzioni complesse sotto il controllo di un programma.

Il microcontrollore o MCU (Microcontroller unit) dispone nel suo interno di almeno cinque blocchi funzionali:

- Una CPU definita come l'unità principale di calcolo;
- Una memoria "programma" solitamente di tipo ROM o EPROM;
- Una memoria "dati" di tipo RAM o EEPROM;
- Una interfaccia di ingresso;
- Una interfaccia di uscita.

Il principio di funzionamento di un microcontrollore è semplice e coincide con quello di un computer e può essere riassunto in solo tre operazioni eseguite dalla CPU: essa legge l'istruzione contenuta nella memoria programma, la interpreta e la esegue.

Tutte le principali aziende elettroniche hanno investito moltissimo in questi componenti che occupano fette sempre più larghe di mercato. Praticamente ogni dispositivo elettronico che richieda un certo grado di "intelligenza", sia esso il forno a microonde piuttosto che la centralina di controllo di una autovettura, utilizza questi componenti.

Attualmente sono disponibili in commercio numerose categorie di microcontrollori che, a loro volta, si suddividono generalmente in famiglie; all'interno di ciascuna famiglia troviamo numerosi modelli con caratteristiche e prestazioni differenti.

Tra i più popolari ricordiamo:

- Famiglia Z8 prodotta dalla Zilog
- Famiglia ST6 prodotta da ST-Microelectronics
- Famiglia PIC prodotta dalla Microchip