SIMULAZIONE DI SISTEMI CASUALI – 1 parte

Variabili casuali e Distribuzioni di variabili casuali

Calcolo delle probabilità

Definizioni

Il calcolo delle probabilità tende a rendere razionale il comportamento dell'uomo di fronte all'incertezza; di fatto viene utilizzato in tutte le situazioni in cui non sono prevedibili tutti i fattori osservabili e in quei casi in cui si debbono prendere decisioni in base ad ipotesi riguardanti eventi futuri.

Un evento casuale (detto anche *evento aleatorio*) è rappresentato da uno dei possibili risultati di un esperimento casuale. L'evento aleatorio può essere:

- certo: quando il risultato è positivo e noto a priori (estrarre una pallina bianca da un un'urna contenente solo palline bianche);
- impossibile: quando il risultato è nullo e noto a priori (estrarre una pallina nera da un un'urna contenente solo palline bianche);
- possibile: quando il risultato non è noto a priori (estrarre una pallina nera da un un'urna contenente palline bianche e nere).

Due o più eventi si dicono *incompatibili* se il verificarsi di uno degli eventi esclude il verificarsi degli altri; si diranno *compatibili* nel caso contrario.

Due eventi incompatibili si dicono *necessari* se uno di essi deve verificarsi necessariamente.

Due o più eventi si dicono *indipendenti* se il verificarsi di uno non modifica il verificarsi dell'altro; si diranno *dipendenti* nel caso contrario.

Si chiama complementare dell'evento E quello corrispondente al non verificarsi dell'evento (si indica con $\bar{E}$ e si legge E negato o non E).

Ad esempio lanciando un dado, l'evento complementare all'uscita del numero 3 è dato dall'uscita dei numeri 1,2,4,5,6.

Si possono dare 4 diverse definizioni di probabilità:

1. soggettivista: la probabilità di un evento è il grado di aspettativa del verificarsi dell'evento (se diciamo che la probabilità di uscita della faccia testa nel lancio di una moneta è il 50% (1/2) gli attribuiamo un grado di fiducia maggiore di quello che attribuiremmo all'uscita del numero 3 nel lancio di un dado a cui diamo probabilità del 16,6% (1/6). Pertanto visto che la probabilità di un evento impossibile è zero e quella di un evento certo è 1, per il generico evento E si può scrivere:

$$0 \leq Pr(E) \leq 1$$

2. classica: la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili, purché tutti i casi siano ugualmente possibili; a titolo di esempio:
    a. l'uscita di doppia testa nel lancio di due monete in successione è pari ad 1/4 essendo TT uno dei 4 casi possibili (TT, TC, CT,CC);
    b. l'uscita di una carta di bastoni da un mazzo di carte napoletane è pari ad 10/40 essendo 10 il numero dei bastoni presenti nel mazzo di 40 carte;
    c. l'estrazione di una pallina bianca da un'urna contenente 5 palline rosse, 12 bianche e 8 nere è pari a 12/25 essendo 12 il numero dei casi favorevoli e 25 quelli possibili.
3. frequentista: la probabilità di un evento è il limite a cui tende la frequenza relativa di un evento (riscontrata in precedenti situazioni) al crescere del numero delle prove; si ricorda che la frequenza relativa è il rapporto tra il numero delle prove in cui si è manifestato l'evento e tutte le prove fatte.
4. assiomatica: la probabilità di un evento è quel numero reale p tale che:
    a. $0 \leq p \leq 1$;
    b. se l'evento è certo $p(E)=1$ e se l'evento è impossibile $p(E)=0$;
    c. se due eventi E_1 ed E_2 sono incompatibili allora $p(E_1 \text{ o } E_2) = p(E_1) + p(E_2)$.

Teoremi

Quando si parla di eventi dipendenti debbono essere analizzate le *probabilità subordinate*, cioè la probabilità che il secondo evento si verifichi subordinatamente al verificarsi del primo evento; ad esempio se si volesse calcolare la probabilità di estrarre una carte di spade da un mazzo napoletano si avrebbe 10/40, qualora tuttavia la carta estratta fosse una seconda carta la sua probabilità risulterebbe diversa sapendo che la prima carta è stata il 3 di bastoni (probabilità=10/39) oppure il 5 di coppe (probabilità=10/39) oppure il 2 di spade (probabilità=9/39) e cosi via). La probabilità del verificarsi dell'evento E_2 subordinatamente all'evento E_1 si indica con $p(E_2 / E_1)$. E' evidente che nel caso di eventi indipendenti si avrebbe $p(E_2 / E_2)= p(E_2)$

I teoremi fondamentali sulle probabilità possono sintetizzarsi in:

1. probabilità composte: la probabilità del verificarsi di un evento che risulta dal concorso di due eventi è data dal prodotto delle probabilità del primo evento e del secondo *subordinatamente* al primo:
    - eventi dipendenti - $p(E_1 \text{ e } E_2) = p(E_1) * p(E_2 / E_1)$
    - eventi indipendenti - $p(E_1 \text{ e } E_2) = p(E_1) * p(E_2)$
2. probabilità totali: la probabilità che si verifichi uno dei due eventi E_1 o E_2 è data dalla somma delle probabilità dei due eventi diminuita della probabilità che si verifichino entrambi:
    - eventi compatibili - $p(E_1 \text{ o } E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \text{ e } E_2)$
    - eventi incompatibili - $p(E_1 \text{ o } E_2) = p(E_1) + p(E_2)$ (la probabilità che si verifichino entrambi è ovviamente nulla).

Richiami di calcolo combinatorio

Per le applicazioni di calcolo delle probabilità è necessario conoscere alcune nozioni di calcolo combinatorio che possono essere sintetizzate nelle seguenti:

- Permutazioni
- Disposizioni
- Combinazioni

VEDERE A TAL PROPOSITO GLI APPUNTI
"CALCOLO COMBINATORIO"

Funzioni di distribuzione di probabilità

Si definisce distribuzione di probabilità il valore delle probabilità associate a tutti gli eventi possibili connessi ad un certo numero di prove dello schema generale di estrazione di una pallina da un'urna.

Le più usuali distribuzioni di probabilità utilizzate nella statistica inferenziale sono rappresentate da:

***distribuzione normale o di Gauss*:**

è una *distribuzione continua* la cui curva ha equazione $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$ in cui la media è $m=np$ e la varianza è $\sigma^2=npq$; la curva è definita in tutto l'intervallo delle x ($\pm\infty$) e presenta le seguenti caratteristiche:

- approssima la distribuzione binomiale al crescere del numero delle prove;
- è simmetrica rispetto alla media nel senso che la probabilità di un valore superiore alla media di un intervallo prefissato è uguale alla probabilità di un valore inferiore alla media dello stesso intervallo;
- l'area al di sotto della curva è pari ad 1;
- approssima molte distribuzioni empiriche nel campo sociale, fisico, economico, ecc.;
- approssima la distribuzione degli errori accidentali (quelli che si commettono quando si misura più volte la stessa grandezza fisica);
- rappresenta la distribuzione di un fenomeno influenzato da infinite cause, nessuna delle quali preponderante.

distribuzione bernoullina o binomiale:

è una *distribuzione discreta* la cui espressione è quella generale indicata nel problema delle prove ripetute; tale distribuzione gode delle seguenti proprietà:

- la distribuzione è simmetrica indipendentemente dal numero delle prove purché $p=q=1/2$;
- la somma delle probabilità della distribuzione è uguale ad uno;
- la probabilità del singolo evento è relativamente bassa;
- la media della distribuzione è np e la sua varianza è npq;
- per n sufficientemente grande (normalmente maggiore di 30) la distribuzione è approssimata dalla distribuzione normale o di Gauss.

La funzione di ripartizione della distribuzione è tabulata per vari valori di n e di p in modo da poter determinare i valori dell'espressione $\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}$ (essendo k il numero dei casi favorevoli).

distribuzione di Poisson:

è una *distribuzione discreta* la cui equazione è $P(x)=\frac{\lambda^{x}}{x!}e^{-\lambda}$ che può ottenersi dalla binomiale quando p è piccolissimo, n molto grande e la media np tenda ad una costante; le caratteristiche della distribuzione sono:

- rappresenta la distribuzione di eventi rari (p è piccolissimo);
- la media della distribuzione è λ che è anche la varianza;
- il massimi della distribuzione si ha in corrispondenza di λ se questo non è intero oppure in corrispondenza di λ e λ-1 se questo non è intero.

VEDERE A TAL PROPOSITO GLI APPUNTI
"DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA' "

Caratteristiche delle variabili aleatorie

Distribuzione di variabile casuale discreta (integrazione al par. 2.1, pag. 266)

In molte applicazioni non è necessaria la conoscenza puntuale della funzione di probabilità ma il calcolo di "indici" che possono essere:
indici di posizione: danno un'idea approssimata dell'ordine di grandezza dei valori esistenti. I più utilizzati sono la moda, la media e la mediana.
Indici di dispersione: vengono utilizzati per descrivere sinteticamente come i valori di una distribuzione sono distanti da un valore centrale (identificato solitamente con la media o con la mediana). Il più utilizzato è la deviazione standard.

Moda
Si chiama moda il dato o la classe di dati che ha maggiore frequenza

Media
La media, o valor medio, viene utilizzata per riassumere un insieme di dati con un solo valore

Mediana
Si dice mediana di un insieme di dati, disposti in ordine crescente, il dato che occupa la posizione centrale. Nel caso che l'insieme sia costituito da un numero dispari di dati, la mediana corrisponde al dato che occupa la posizione centrale; nel caso che l'insieme sia costituito da un numero pari di dati, la mediana si ottiene calcolando la media aritmetica dei due dati che occupano le posizioni centrali.

Deviazione standard
Consideriamo la seguente successione di dati statistici:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

aventi la seguente media aritmetica:

$$M = \Sigma_i x_i / n$$

Le differenze sotto indicate:

$$x_1 - M, x_2 - M, \dots, x_n - M$$

tra ciascun dato e la media aritmetica si chiamano **scarti** semplici dei dati statistici dalla loro media aritmetica M.
Si verifica facilmente che la sommatoria di tutti gli scarti è uguale a zero, ossia che:

$$\Sigma_i (x_i - M) = 0$$

Ciò è dovuto al fatto che gli scarti semplici positivi e quelli negativi si neutralizzano a vicenda.

Per rendere utili gli scarti semplici al fine della misura della variabilità, occorre considerarli in valore assoluto.
Così facendo si ottiene la formula di un nuovo indice di variabilità, detto **scarto semplice** medio:

$$S = \Sigma_i |x_i - M| / n$$

Lo scarto semplice medio, si dimostra inadeguato in alcuni casi, per cui si introduce un nuovo indice, detto **scarto quadratico medio.**

Consideriamo la seguente successione di dati statistici:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

e sia:

$$M = \Sigma_i x_i / n$$

la loro media aritmetica.
Calcoliamo poi gli scarti semplici dei dati dalla media:

$$x_1 - M, x_2 - M, \ldots, x_n - M$$

ed elevando al quadrato ciascuno di essi:

$$(x_1 - M)^2, (x_2 - M)^2, \ldots, (x_n - M)^2$$

otteniamo lo scopo di renderli tutti non negativi, evitando così che la loro somma dia zero; il risultato ottenuto costituisce la successione degli **scarti quadratici**.
Se calcoliamo la media aritmetica di questi scarti quadratici:

$$\Sigma_i (x_i - M)^2 / n$$

ricaviamo un indice di variabilità, detto **varianza**.
Infine, per tornare alla stessa unità di misura dei dati iniziali, eseguiamo la radice quadrata della varianza, ottenendo per risultato quell'importante indice di variabilità che si chiama **scarto quadratico medio:**

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma_i (x_i - M)^2}{n}}$$