DISTRIBUZIONI

di

PROBABILITA'

Distribuzione di probabilità

Si definisce distribuzione di probabilità
il valore delle probabilità associate a tutti gli eventi possibili
connessi ad un certo numero di prove

Esistono due tipi di funzioni di distribuzione:

•Funzioni di distribuzione *empiriche*
ottenibili dall'analisi dei dati sperimentali, sono in realtà delle funzioni di distribuzione delle frequenze.

•Funzioni di distribuzione *teoriche*
ricavabili da modelli matematici del sistema.

Distribuzione di probabilità

Le più usuali distribuzioni di probabilità sono:

- Distribuzione binomiale (o di Bernoulli)
  è una distribuzione discreta
- Distribuzione normale (o di Gauss)
  è una distribuzione continua
- Distribuzione di Poisson
  è una distribuzione discreta

Distribuzione di variabili casuali

- Se la variabile casuale X non assume tutti gli infiniti valori di R, o di un suo intervallo [a, b], è chiamata variabile *casuale discreta*.
  - Nel caso di una variabile casuale discreta la distribuzione di probabilità può sempre essere definita assegnando, ad ogni valore che la variabile può assumere, una probabilità positiva tale che la somma delle probabilità sia sempre 1.
- Se la variabile casuale X assume tutti gli infiniti valori di R, o di un suo intervallo [a, b], è chiamata variabile *casuale continua*.
  - La distribuzione di probabilità di una variabile casuale continua non può essere specificata nello stesso modo. È impossibile, infatti, assegnare probabilità non nulle a tutti i punti di un intervallo e soddisfare la richiesta che la somma delle probabilità dei distinti valori possibili sia 1.

Distribuzione binomiale

Distribuzione binomiale

La distribuzione binomiale consente di valutare la probabilità che una modalità di un evento con probabilità "p" si verifichi un determinato numero di volte "i" entro un numero totale "n" di eventi.

La formula è:

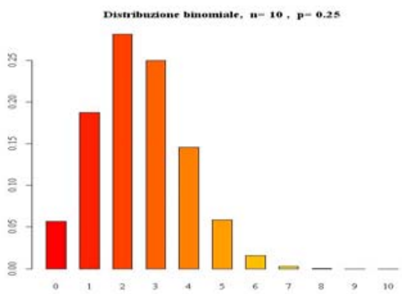
$$P\,(i,n,p) = \binom{n}{i} p^{i} \cdot q^{n-i}$$

Esempi:
•Su 10 figli 7 siano maschi (n=10; i=7; p=0,5)
•Su 8 lanci di dado il due esca tre volte (n=8; i=3; p=1/6)

Distribuzione binomiale

Proprietà

•La somma delle probabilità della distribuzione è uguale a uno;
•La probabilità del singolo evento è relativamente bassa;
•La media della distribuzione è *np* e la varianza è *npq*;



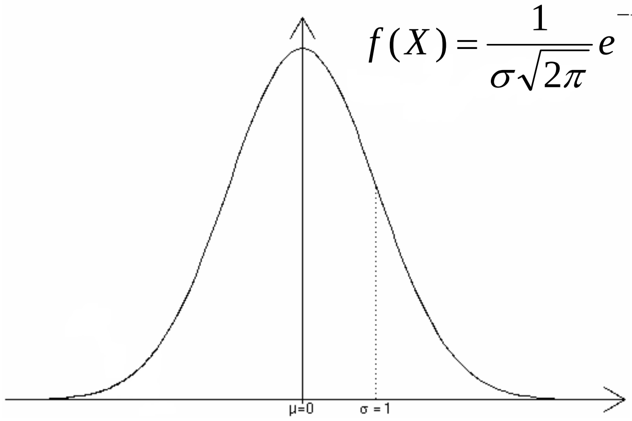
Distribuzione normale

La **distribuzione di Gauss**, detta anche "**normale**", si applica quando il numero di prove che si fanno è molto grande e la grandezza osservabile può assumere valori continui fra $-\infty$ e $+\infty$. Essa permette di sapere come si distribuiscono i valori degli scarti di una data misura intorno al valore medio.

Questa distribuzione è ricavabile da quella di Bernoulli imponendo che il numero *n* di prove sia molto grande e che la probabilità *p* che l'evento considerato si verifichi sia sufficientemente grande affinché sia np>>1, al limite infinito.

La Distribuzione Normale

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

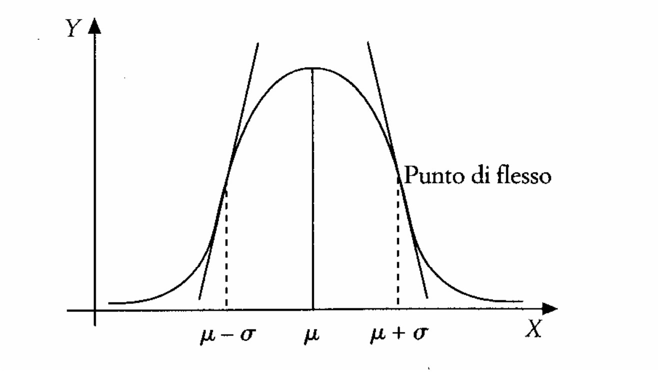


La Distribuzione Normale

Caratteristiche:

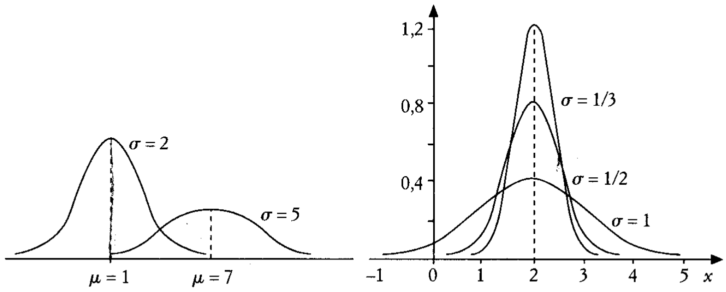
- Approssima la distribuzione binomiale al crescere del numero delle prove;
- È simmetrica rispetto alla media;
- L'area al di sotto della curva è pari a 1 ;
- Rappresenta la distribuzione di un fenomeno influenzato da infinite cause, nessuna delle quali preponderante.

La Distribuzione Normale

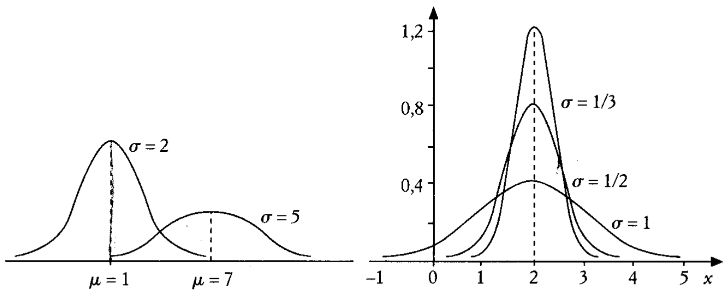


Valori attesi della Distribuzione Normale

- Dalla precedente formula consegue che ogni distribuzione normale è univocamente definita dalla **media e dalla varianza** (detti valori attesi). Le distribuzioni normali possono differire, pertanto, per la media e varianza, nonostante mantengano costanti le caratteristiche.

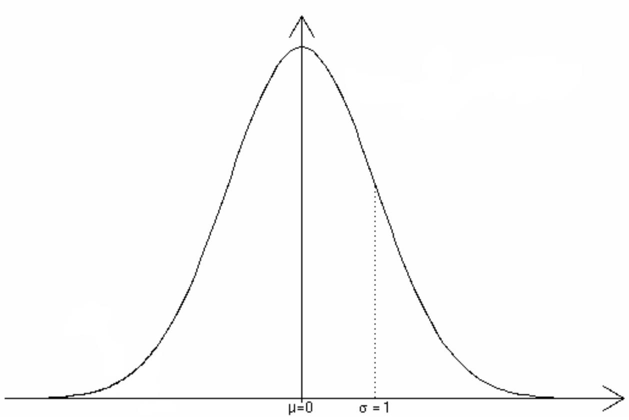


Valori attesi della Distribuzione Normale



Si può osservare come al variare della media e della varianza la curva subisca sia uno spostamento sull’asse dell’ascissa, sia un appiattimento; mentre se si fa variare solo la varianza e si tiene costante la media, la curva si appiattisce quando la varianza cresce e diventa più appuntita quando la varianza cala, mentre il centro di gravitazione rimane lo stesso.

La Distribuzione Normale



Qual è la probabilità che un evento cada nell'intervallo x_1 e x_2 ?

La Distribuzione Normale

- Per una variabile casuale continua X la probabilità P($\mathbf{x_1}$ ≤ X ≤ $\mathbf{x_2}$) è uguale all'area sottesa dalla funzione di densità f(x) nell'intervallo [$\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$].
- Se la variabile casuale X ha una funzione di densità f(x) e $\mathbf{x_1} \leq \mathbf{x_2}$, allora la probabilità che X assuma un valore compreso nell'intervallo [c,d] è:

$$P(\mathrm{x}_1 \leq X \leq \mathrm{x}_2) = \int_c^d f(x)dx$$

La Distribuzione Normale standardizzata

- La distribuzione normale contiene due parametri, μ e σ^2, che ne rendono difficile il calcolo. Il ricorso alla cosidetta "***distribuzione standardizzata***" o "ridotta" consente invece di individuare le probabilità relative ai diversi intervalli di valori mediante le *tavole di probabilità*.
- La *distribuzione normale standardizzata* si ottiene con la trasformazione lineare dei punti grezzi in punti z:

$$z = \frac{(X - z)}{\sigma}$$

e quindi

$$z^2 = \frac{(X - \mu)^2}{\sigma^2}$$

La Distribuzione Normale standardizzata

- La funzione di densità di probabilità della distribuzione normale standardizzata *f*(z) diventa:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad (-\infty < z < +\infty)$$

La distribuzione normale standardizzata presenta le stesse caratteristiche della distribuzione normale NON standardizzata.

Ciò che distingue le due distribuzioni è che la normale standardizzata ha

MEDIA=0 e DEVIAZIONE STANDARD=1,

per cui è rappresentata da UNA SOLA CURVA, mentre la distribuzione normale generale è costituita da infinite curve a seconda dei valori di μ e σ.

La Distribuzione Normale standardizzata

L'importanza della distribuzione normale standardizzata sta nel fatto che le probabilità corrispondenti alle superfici racchiuse dalla curva normale possono essere calcolate. Queste probabilità sono state tabulate e vengono riportate in apposite tabelle.

È noto che:

il 68.26% dell'area totale è compreso tra ±1 *deviazione standard* attorno alla media, cioè a ±1 *punto z* dalla media;

il 95.44% è racchiuso tra ±2 *deviazioni standard* attorno alla media, quindi a ±2 *punti z* dalla media.

Distribuzione di Poisson

La **distribuzione di Poisson**, detta anche "**degli eventi rari**" (distanziati temporalmente), è una distribuzione discreta che può ottenersi dalla binomiale quando:

- *p* è piccolissimo;
- *n* è molto grande;

Distribuzione di Poisson

Sia λ la frequenza degli eventi, cioè il numero medio degli eventi che si registrano nell'unità di tempo.

La probabilità che l'evento si verifichi in un intervallo di osservazione Δ**t** è:

$$P = \lambda \cdot \Delta t$$

Se osservo l'evento per un tempo **t** diviso in **n** osservazioni, abbiamo:

Durata di osservazione : $\Delta t = t / n$
Probabilità che l'evento accada nell'intervallo Δt: $p = (\lambda \cdot t) / n$

Distribuzione di Poisson

Sia λ la frequenza degli eventi, cioè il numero medio degli eventi che si registrano nell'unità di tempo.

La probabilità che l'evento si verifichi in un intervallo di osservazione Δ**t** è:

$$P = \lambda \cdot \Delta t$$

Se osserviamo l'evento per un tempo **t** diviso in **n** osservazioni, abbiamo:

durata di osservazione : $\Delta t = t / n$
probabilità che l'evento accada nell'intervallo Δt: $p = (\lambda \cdot t) / n$

Distribuzione di Poisson

Se accostiamo la possibilità che l'evento accada in un tempo **Δt** alla possibilità di successo in una prova bernoulliana, possiamo assimilare il processo di n intervalli a una sequenza binomiale di prove bernoulliane di probabilità **($\lambda \cdot$ t) / n**

$$P\ (i, n, p) = \binom{n}{i} p^{i} \cdot q^{n-i}$$

Sostituendo **p = ($\lambda \cdot$ t) / n** si perviene all'equazione:

$$P_{i,\lambda} = \frac{\lambda^{i}}{i!} e^{-\lambda}$$

che dà la probabilità di trovare **i** oggetti in un determinato intervallo di tempo nel quale, in condizioni di omogeneità, dovrebbero trovarsene λ (con $\lambda > 0$)

Distribuzione di Poisson

Quindi la distribuzione di Poisson è adatta a descrivere un'importante classe di fenomeni in cui, su un grande numero n di prove, in ciascuna delle quali la probabilità di successo è piccola, si verificano mediamente λ successi

Esempio:

ad una guardia medica arrivano in media 3,5 richieste ogni ora di interventi urgenti a domicilio.
Calcolare la probabilità che in una stessa ora arrivino 3, 4, oppure 5 chiamate urgenti.

p(i= 3) = (3,5^3 / 3!) × e$^{-3,5}$ = 0.21579
p(i = 4) = (3,5^4 / 4!) × e$^{-3,5}$ = 0.1888
p(i = 5) = (3,5^5 / 5!) × e$^{-3,5}$ = 0.13217