CALCOLO COMBINATORIO

Calcolo combinatorio

<u>**Disposizioni**</u>

Si dicono disposizioni di N elementi di classe k tutti quei gruppi che si possono formare prendendo ogni volta k degli N elementi e cambiando ogni volta un elemento o l'ordine degli elementi stessi.

Le disposizioni possono essere: **senza ripetizione** o **con ripetizione**

Calcolo combinatorio

Disposizioni con ripetizione

quando ogni elemento può comparire più volte in ciascun gruppo e risultano pari a:

$$D_{N,k} = N^{k}$$

ad esempio avendo le prime quattro lettere dell'alfabeto a, b, c, d, prendendole a due a due è possibile ottenere i seguenti gruppi:

aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dd

il numero dei gruppi risulta

$$^{r}D_{4,2} = 4^{2} = 16$$

Calcolo combinatorio

Disposizioni con ripetizione

$$D_{N,k} = N^k$$

Esempi:

•Quante colonne del totocalcio posso compilare?
•Quante password posso creare con 5 lettere?

Esercizio:

•Quante auto posso immatricolare considerando l'attuale numerazione delle targhe (AB 123 XY) ?

Considerando le 26 lettere dell'alfabeto e le 10 cifre, ottengo:
Dal primo gruppo di lettere: $D_{26,2} = 26^2 = 676$ modi per disporre le lettere;
Dal gruppo di cifre: $D_{10,3} = 10^3 = 1000$ modi per disporre le cifre;
Dall'ultimo gruppo: $D_{26,2} = 26^2 = 676$ modi per disporre le lettere;

Poiché a ciascun modo del primo gruppo posso abbinare 1000 modi del secondo, e a ciascuno di questi abbinamenti posso abbinare uno dei 676 modi dell'ultimo gruppo, in definitiva posso immatricolare:

676 * 1000 * 676 = 456.976.000 automobili

Calcolo combinatorio

Disposizioni senza ripetizione

quando ogni elemento deve comparire una sola volta in ciascun gruppo e risultano pari a (il numero dei termini del prodotto è pari a *k*):

$$\boldsymbol{D_{N,k}} = \boldsymbol{N} \cdot (\boldsymbol{N}-1) \cdot (\boldsymbol{N}-2) \cdot (\boldsymbol{N}-3) \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot (\boldsymbol{N}-\boldsymbol{k}+1) = \frac{\boldsymbol{N!}}{(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{k})!}$$

avendo le prime quattro lettere dell'alfabeto a, b, c, d, prendendole a due a due è possibile ottenere i seguenti gruppi:

ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc

il numero dei gruppi risulta

$$\boldsymbol{D}_{4,2} = 4 \cdot (4-1) = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

Calcolo combinatorio

Disposizioni senza ripetizione (semplici)

$$D_{N,k} = \frac{N!}{(N-k)!}$$

Esempi:

- In quanti modi dispongo 7 palline di diverso colore in gruppi da quattro?

Esercizio:

- In quanti modi 5 persone si siedono su 8 posti?

E' come se dovessi calcolare quanti gruppi posso realizzare con 8 sedie prese in gruppi di 5.

$$D_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 8*7*6*5*4 = 6720$$

Calcolo combinatorio

<u>**Combinazioni**</u>

Si dicono combinazioni di *N* elementi di classe k tutti quei gruppi che si possono formare prendendo ogni volta *k* degli *N* elementi e cambiando ogni volta un elemento <u>*e non l’ordine degli elementi stessi*</u>.

Sono in pratica disposizioni dalle quali vengono escluse le combinazioni sovrapponibili (ovvero che contengono i medesimi oggetti anche se disposti in diverso ordine).

Le combinazioni possono essere: **senza ripetizione** o **con ripetizione**

Calcolo combinatorio

Combinazioni senza ripetizione (semplice)

quando ogni elemento deve comparire una sola volta in ciascun gruppo e risultano pari a:

$$C_{N,k} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot (N-k+1)}{k!} = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!} \equiv \binom{N}{k}$$

ad esempio avendo le prime cinque lettere dell'alfabeto a, b, c, d, e, prendendole a due a due è possibile ottenere i seguenti gruppi:

ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de;

il numero dei gruppi risulta

$$C_{4,2} = \frac{5 \cdot (5-1)}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 10$$

Calcolo combinatorio

Combinazioni senza ripetizione (semplice)

$$C_{N,k} = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!} \equiv \binom{N}{k}$$

Esempi:

- In quanti modi scelgo tre interrogati tra 20 alunni?
- In quanti modi estraggo quattro carte da un mazzo di quaranta?

Esercizio:

- In quanti modi è possibile dividere 20 alunni 4 gruppi, due da 6 e due da 4?

I primi 6 ragazzi possono essere scelti tra 20 in $C_{20,6} = \frac{20!}{6! \cdot (20-6)!}$ modi

I successivi 6 ragazzi scelti tra 14 in $C_{14,6} = \frac{14!}{6! \cdot (14-6)!}$ modi

I successivi 4 ragazzi: $C_{8,4} = \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!}$

I restanti 4 possono essere scelti in un modo solo.

Calcolo combinatorio

Combinazioni con ripetizione

quando ogni elemento può comparire più volte in ciascun gruppo e risultano pari a :

$$^{r}C_{N,k} == \frac{(N+k-1)!}{k!\cdot(N-1)!} \equiv \begin{pmatrix} N+k-1 \\ \cdots \quad k \end{pmatrix}$$

ad esempio avendo le prime cinque lettere dell'alfabeto a, b, c, d, e, prendendole a due a due è possibile ottenere i seguenti gruppi:

aa, ab, ac, ad, ae, bb, bc, bd, be, cc, cd, ce, dd, de, ee;

il numero dei gruppi risulta

$$^{r}C_{5,2} = \frac{(5+2-1)!}{2!\cdot(5-1)!} = 15$$

Calcolo combinatorio

Combinazioni con ripetizione

$$ {}^{r}C_{N,k} == \frac{(N+k-1)!}{k!\cdot(N-1)!} \equiv \begin{pmatrix} N+k-1 \\ \cdots \quad k \end{pmatrix} $$

Esempi:

•In quanti modi distribuisco 6 oggetti in 4 scatole?

•In quanti modi distribuisco 8 libri a 5 studenti?

Calcolo combinatorio

Permutazioni

Si dicono permutazioni di *N* elementi tutti quei gruppi che si possono formare con gli *N* elementi cambiando l'ordine degli elementi stessi.

Ad esempio avendo le prime tre lettere dell'alfabeto a, b, c, è possibile ottenere i seguenti gruppi:

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Il numero dei gruppi che si possono formare risulta pari a

$$\boldsymbol{P_N} = \boldsymbol{N} \cdot (\boldsymbol{N} - 1) \cdot (\boldsymbol{N} - 2) \cdot (\boldsymbol{N} - 3) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boldsymbol{N!}$$

Calcolo combinatorio

Permutazioni

$$P_N = N!$$

Esempi:

•In quanti modi metto 10 libri (tutti) sullo scaffale?

Esercizio:

•In quanti modi si possono sistemare in una fila di sedie 5 ragazzi e 6 ragazze, con la condizione che i ragazzi stiano tutti vicini tra loro così come le ragazze?

Si tratta di un prodotto tra due permutazioni, una riferita ai 5 ragazzi e l'altra alle 6 ragazze, per cui abbiamo:

5! * 6! = 120 * 720 = 86400

Calcolo combinatorio

<u>Distribuzione binomiale</u> (teorema delle prove ripetute)

La distribuzione binomiale consente di valutare la probabilità che una modalità di un evento con probabilità “p” si verifichi un determinato numero di volte “i” entro un numero totale “n” di eventi.

La formula è:

$$P\,(i, n, p) = \binom{n}{i} p^{i} \cdot q^{n-i}$$

Calcolo combinatorio

<u>Distribuzione binomiale</u> (teorema delle prove ripetute)

$$P(i, n, p) = \binom{n}{i} p^{i} \cdot q^{n-i}$$

Esempi:

- Su 10 figli 7 siano maschi (n=10; i=7; p=0,5)
- Su 8 lanci di dado il due esca tre volte (n=8; i=3; p=1/6)